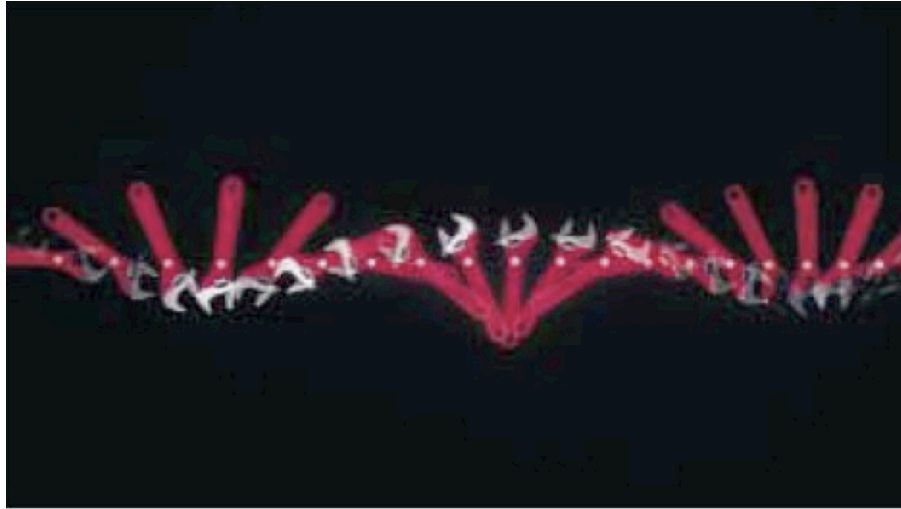


Dinamica Rotazionale

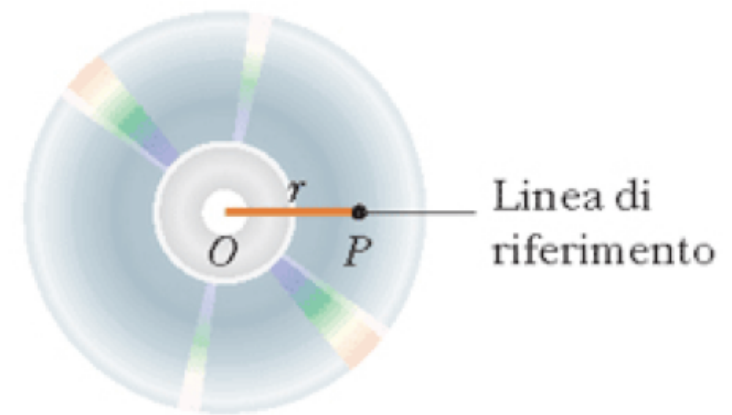


- *Richiamo:* cinematica rotazionale, velocità e accelerazione angolare
- *Energia cinetica rotazionale:* momento d'inerzia
- *Equazione del moto rotatorio:* momento delle forze
- *Leggi di conservazione per il moto rotatorio:* momento angolare

Posizione angolare

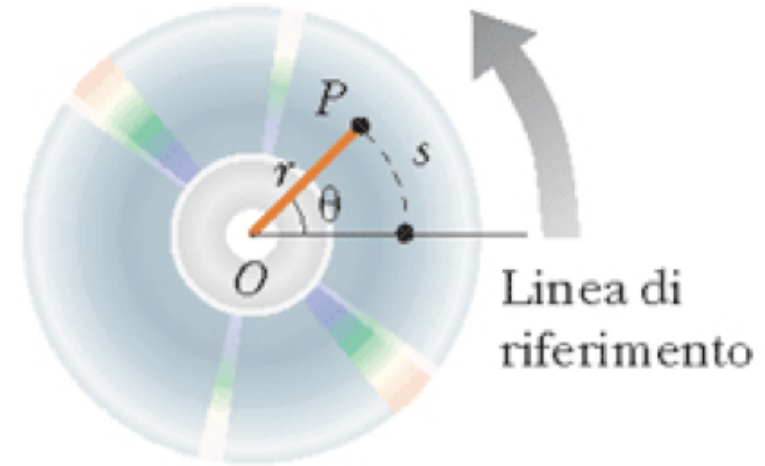
Come possiamo descrivere la posizione angolare in un moto di rotazione di un corpo rigido? Prendiamo per semplicità il caso di un disco.

- Si sceglie una linea di riferimento
- Un punto P a distanza r dall'origine ruoterà attorno all'origine in un cerchio di raggio r
- Ogni particella nel corpo rigido percorre un moto circolare attorno all'origine O
- Conviene usare coordinate polari per rappresentare la posizione di P (o di altri punti): $P = (r, \theta)$, dove r è la distanza dall'origine a P e θ è misurato dalla linea di riferimento in senso antiorario



Posizione angolare II

- Se la particella si muove, la sola coordinata che cambia è θ
- Se la particella ruota di θ , percorre un arco di lunghezza s , legato a r da $s = r\theta$



- Possiamo associare l'angolo θ all'intero corpo rigido come pure alle particelle individuali che lo compongono

Ricordate che ogni particella dell'oggetto ruota dello stesso angolo

- La *posizione angolare* del corpo rigido è l'angolo θ fra la linea di riferimento sul corpo e la linea fissa di riferimento nello spazio

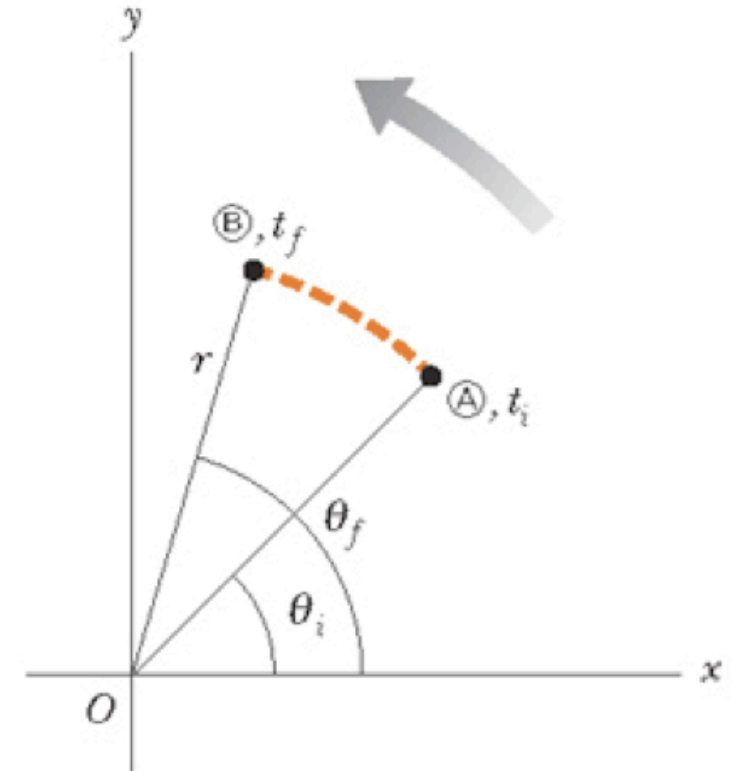
La linea fissa di riferimento nello spazio è spesso presa come asse x

Spostamento angolare

- Lo spostamento angolare è definito come l'angolo di rotazione dell'oggetto in un intervallo di tempo finito:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

- E' l'angolo spazzato dalla linea di riferimento di lunghezza r



- La velocità angolare *media* $\bar{\omega}$ di un corpo rigido in rotazione è il rapporto fra spostamento angolare e intervallo di tempo:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocità angolare

- La velocità angolare *istantanea* ω è definita come il limite della velocità angolare media $\bar{\omega}$ quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

- Unità della velocità angolare: radianti/s, o anche s^{-1} (i radianti non hanno dimensione)
- La velocità angolare è positiva se θ aumenta (rotazione in senso antiorario), negativa se θ diminuisce (rotazione in senso orario)
- Notare l'analogia fra *velocità* per il moto *lineare* e *velocità angolare* per il moto *rotazionale*

Accelerazione angolare

- L'accelerazione angolare media, $\bar{\alpha}$, di un corpo è definita come il rapporto fra variazione della velocità angolare e il tempo richiesto per la variazione:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

L'accelerazione angolare istantanea α è il limite dell'accelerazione angolare media $\bar{\alpha}$ quando l'intervallo di tempo tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- Le unità dell'accelerazione angolare sono radianti/s², oppure s⁻² (giacché i radianti non hanno dimensioni)

Velocità e accelerazione

La velocità in un corpo che ruota attorno ad un asse è sempre *tangente* al percorso:

$v = v_T$ (velocità tangenziale).

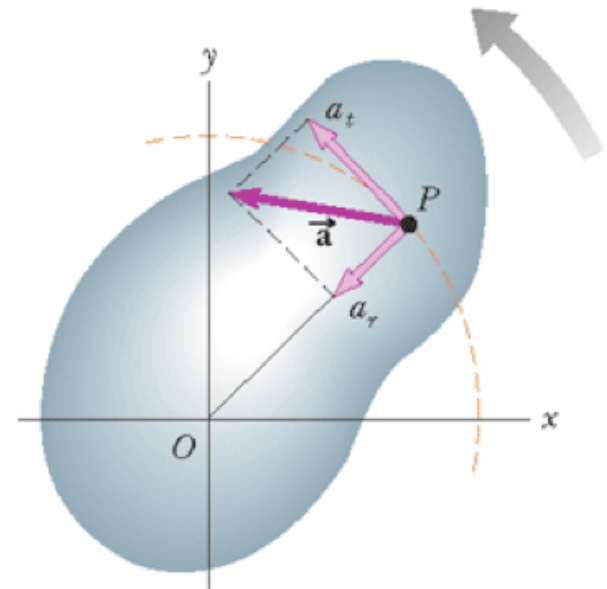
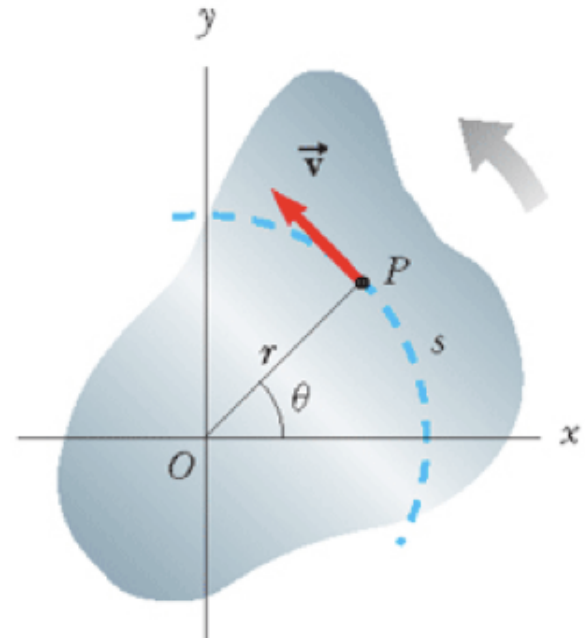
L'accelerazione ha una componente *tangenziale*:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\alpha$$

e una radiale, o *centripeta*:

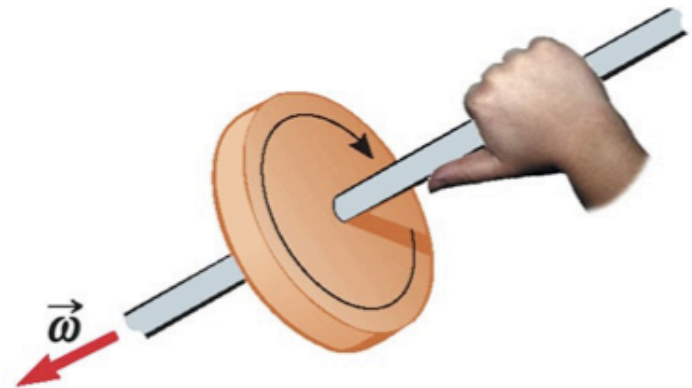
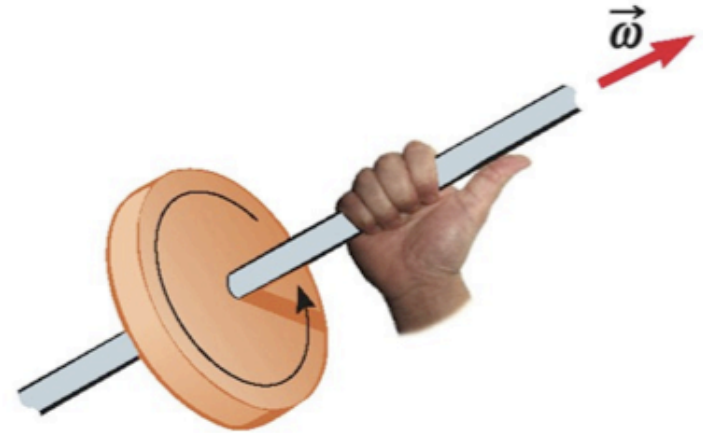
$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

con $|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_c^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$



Direzione e verso

- Velocità e accelerazione angolare possono essere definiti come *vettori* $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$, rispettivamente di modulo ω e α , diretti lungo l'asse di rotazione
- Il verso di $\vec{\omega}$ è dato dalla regola della mano destra
- $\vec{\alpha}$ è diretto come $\vec{\omega}$ se la velocità angolare aumenta, in senso opposto se la velocità angolare diminuisce



Con questa definizione, la velocità di un punto del corpo rigido può essere scritta in generale come $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, ovvero $v = \omega r_{\perp}$, dove $r_{\perp}$ è la distanza dall'asse. Questa è l'espressione da usare in tre dimensioni.

Cinematica Rotazionale

Per *accelerazione angolare costante* (in modulo, direzione e verso!) si può descrivere il moto del corpo rigido usando delle equazioni cinematiche: l'analogo rotazionale delle equazioni cinematiche del moto lineare. Matematicamente:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad , \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

La relazione fra quantità lineari ed angolari è semplicemente

$$s(t) = \theta r_{\perp} \quad , \quad v(t) = \omega r_{\perp} \quad , \quad a_t = \alpha r_{\perp}$$

dove a_t è l'accelerazione tangenziale e $r_{\perp}$ la distanza dall'asse di rotazione (attenzione: non dall'origine!)

Notare che tutti i punti del corpo ruotante hanno lo stesso moto angolare, ma hanno moto lineare differente.

Energia Cinetica Rotazionale

Un corpo ruotante con velocità angolare ω possiede un'energia cinetica *rotazionale*. Ogni particella del corpo ha energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$, dove $v_i = \omega r_{\perp i}$. L'energia cinetica rotazionale è la somma di tali energie:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

dove I è noto come *momento d'inerzia*.

Notare l'analogia fra energie cinetiche associate al moto lineare:

$$K = \frac{1}{2} m v^2, \text{ e associate al moto rotazionale, } K_R = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

L'energia cinetica rotazionale non è un nuovo tipo di energia! E' energia cinetica e si misura nelle stesse unità, joule (J)

Momento d'inerzia

Definizione del momento d'inerzia: $I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2$ (Unità SI: $\text{kg}\cdot\text{m}^2$).

- Il momento d'inerzia *dipende dall'asse di rotazione!* (ma può essere calcolato rispetto a qualunque origine, purché sull'asse di rotazione).
- Si può calcolare il momento d'inerzia di un corpo dividendolo in piccoli elementi di volume, ognuno di massa Δm_i . Nel limite continuo:

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 = \int r_{\perp}^2 dm.$$

- Come per il centro di massa, tale integrale è in generale complicato, salvo per corpi di densità ρ costante (in tal caso $dm = \rho dV$ e ci si riduce a un integrale di volume), oggetti di forma semplice, asse di rotazione simmetrico.

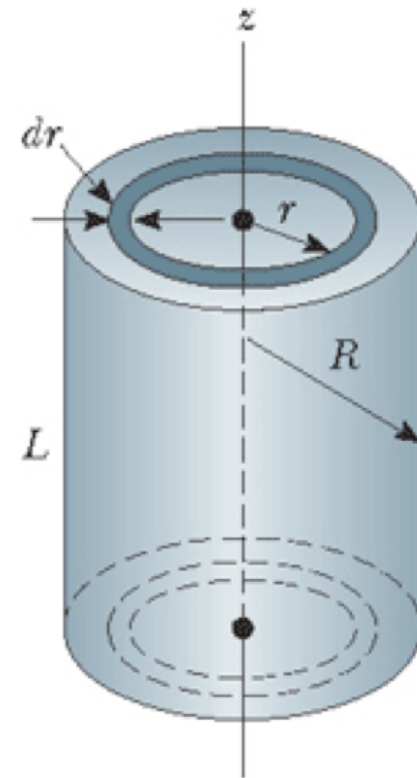
Momento d'inerzia, esempi semplici

- Modello di una molecola biatomica omonucleare: due atomi di massa M a distanza d , rispetto ad un asse passante per il centro:

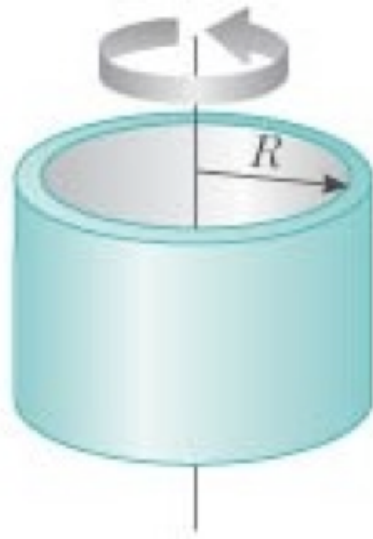
$$I = M \left(\frac{d}{2} \right)^2 + M \left(\frac{-d}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} M d^2$$

- Momento d'inerzia di un cilindro omogeneo attorno al suo asse: poniamo $\rho = M/(\pi R^2 L)$, $dm = \rho(2\pi r L)dr$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \rho(2\pi r L) dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{2M R^4}{R^2 \cdot 4} = \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

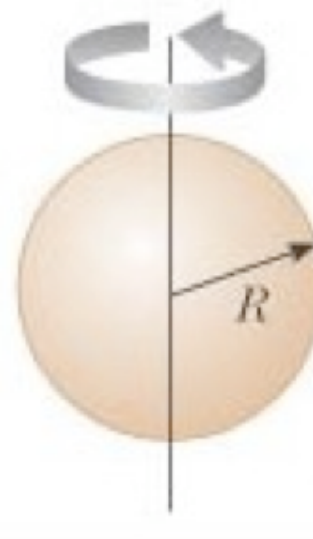


Momento d'inerzia per vari corpi rigidi



Guscio cilindrico
sottile:

$$I = MR^2$$

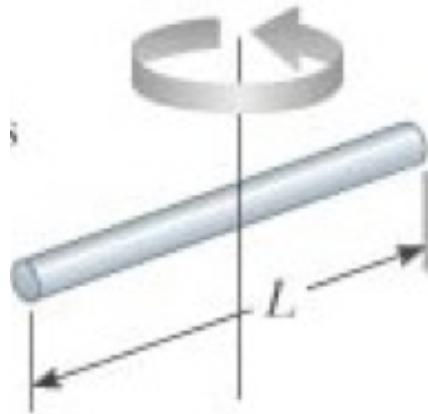


Sfera:

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Sbarra sottile,
asse passante
per il centro:

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



Sbarra sottile,
asse passante
per un estremo:

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



Un teorema utile sul momento d'inerzia

- Il momento d'inerzia I di un corpo di massa M rispetto ad un certo asse è dato da

$$I = I_{cm} + Md^2$$

dove I_{cm} è il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo a quello considerato, distante d da questo, e *passante per il centro di massa* del sistema considerato.

Dimostrazione: chiamiamo $\vec{r}_i$ e $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{d}$ le posizioni rispetto al primo asse e rispetto al centro di massa. Vale:

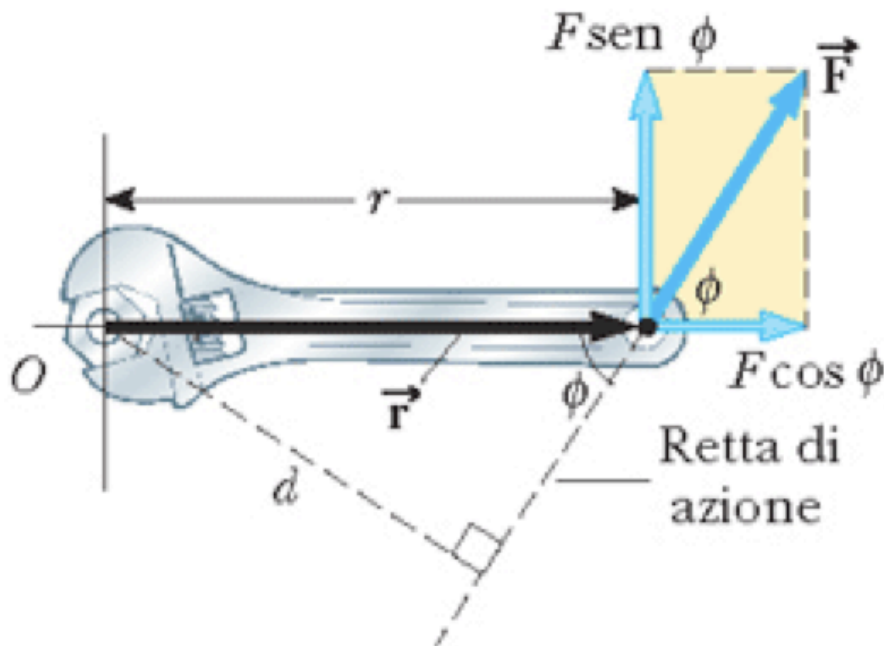
$$I = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \sum_i m_i [(\vec{r}'_i + \vec{d})_{\perp}]^2 = \sum_i m_i r_{\perp i}'^2 + \sum_i m_i d_{\perp}^2 + 2 \sum_i m_i \vec{r}'_i \cdot \vec{d}_{\perp}$$

(notare che $\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})$, dove $\hat{n}$ è il versore dell'asse di rotazione) ma per definizione, $\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0$ (il centro di massa è nell'origine) da cui l'enunciato.

Momento della forza

Se è la forza che cambia il moto, cos'è che cambia la rotazione?

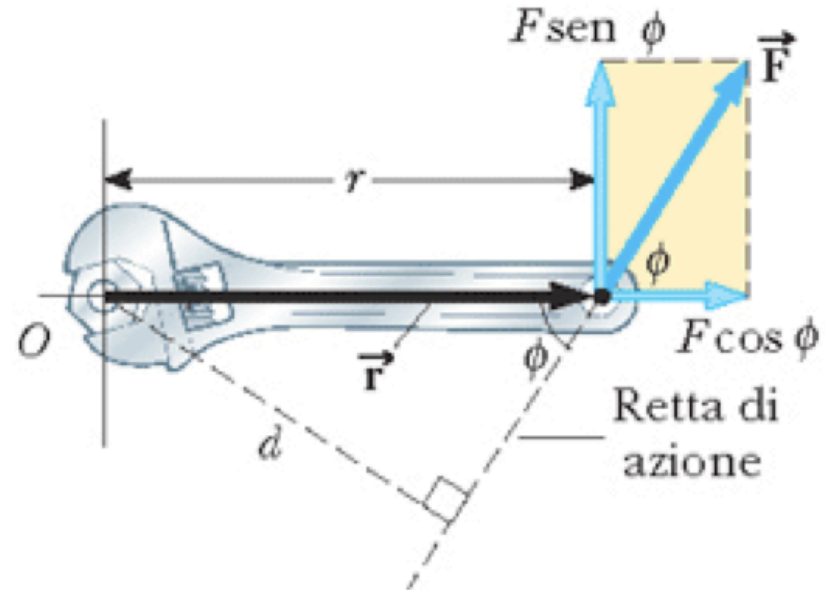
- *Momento, $\vec{\tau}$, di una forza, $\vec{F}$* : è un vettore definito come $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$.
- Il momento di una forza *dipende dall'origine e dal punto ove la forza è applicata!* (tipicamente, l'origine è scelta su di una asse di rotazione)



- ϕ è l'angolo fra la forza $\vec{F}$ e il vettore $\vec{r}$ fra l'origine e il punto di applicazione della forza
- $\tau = rF \sin \phi = dF$ dove $d = r \sin \phi$ è il *braccio del momento* o della leva

Momento della forza II

- Il momento della forza ci dà la "tendenza" di una forza a far ruotare un corpo (attorno ad un certo asse).
- Solo la componente della forza ortogonale a $\vec{r}$ produce momento, ovvero tende a far ruotare un corpo
- La componente lungo $\vec{r}$ della forza *non produce momento*, ovvero non tende a far ruotare un corpo
- Il momento è *positivo* se la rotazione indotta è *antioraria*

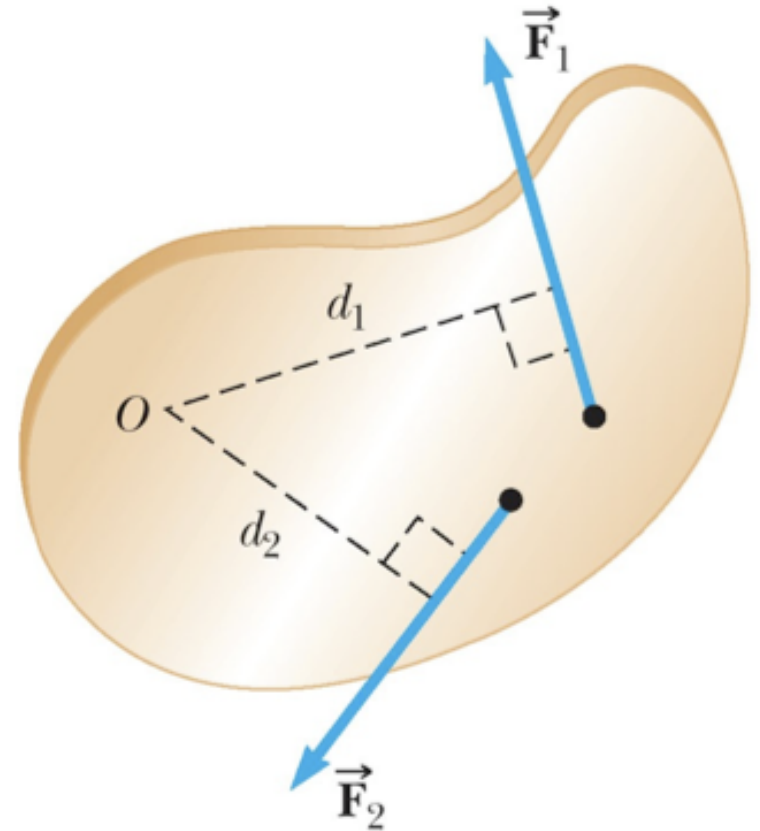


Unità SI del momento: N·m. Attenzione: benché il momento sia una forza moltiplicata per una distanza, è molto diverso da lavoro ed energia! Il momento non si indica *mai* in Joule.

Equilibrio di un corpo rigido

Il momento totale (o risultante) è la *somma vettoriale* dei momenti.

- Nell'esempio accanto, la forza $\vec{F}_1$ tenderà a causare una rotazione antioraria del corpo; la forza $\vec{F}_2$ tenderà a causare una rotazione oraria del corpo.
- $\tau = |\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2| = (d_1 F_1 - d_2 F_2)$; il vettore $\vec{\tau}$ è ortogonale al piano.



Condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \sum_i \vec{\tau}_i = 0$$

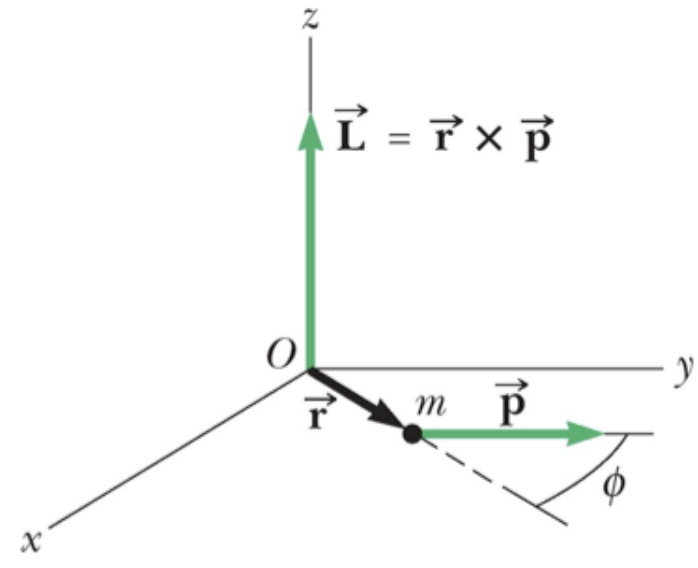
Momento angolare

Se il momento è l'analogo rotazionale della forza, qual è l'analogo rotazionale della quantità di moto?

Momento angolare: è un vettore, di solito indicato con $\vec{L}$, definito come

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

dove $\vec{p} = m\vec{v}$ è la quantità di moto di una particella.



- E' noto anche come *momento della quantità di moto*
- Il suo valore dipende dalla scelta dell'origine
- E' nullo se $\vec{r} \parallel \vec{p}$, ha modulo $L = rp \sin \phi$, dove ϕ è l'angolo fra $\vec{r}$ e $\vec{p}$.

Equazioni del moto angolari

Dalla II legge di Newton, scelta un'origine, troviamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{m} \vec{p} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Quindi, $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$, analogo rotazionale della II Legge di Newton.

- Non è una nuova legge fondamentale della dinamica! E' la II legge di Newton, specializzata al caso del moto rotatorio
- $\vec{L}$ e $\vec{\tau}$ sono calcolati rispetto agli stessi assi e alla stessa origine fissa; tuttavia la legge vale qualunque siano gli assi e l'origine scelta
- Valido per sistemi di riferimento inerziali.

Momento angolare di un sistema di particelle

Il momento angolare di un sistema di particelle è la somma vettoriale dei momenti angolari di ogni particella:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i$$

Differenziando rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{tot}$$

dove $\vec{\tau}_{tot}$ è il momento totale delle forze. Analogamente al caso della quantità di moto, solo il momento delle forze *esterne* è responsabile per la variazione del momento angolare!

Per un corpo rigido, il momento angolare totale diventa un integrale.

Momento angolare di un corpo rigido

Consideriamo un caso semplice: disco ruotante con velocità angolare ω

$$L = \sum L_i = \sum_i m_i v_i r_{\perp i} = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \omega \equiv I \omega$$

dove I è il momento d'inerzia del disco (attorno all'asse di rotazione). Si può dimostrare che tale relazione ha validità generale e può essere scritta sotto forma vettoriale: $\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$. Questa è l'analogo rotazionale della relazione fra velocità e quantità di moto.

La relazione fra momento e accelerazione angolare:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \vec{\alpha}$$

valida per asse di rotazione fisso, è l'analogo rotazionale di $\vec{F} = m \vec{a}$.

Conservazione del momento angolare

Il momento angolare di un corpo, o di un sistema di particelle, è *conservato* se la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla:

$$\vec{L} = \text{costante} \implies \vec{L}_f = \vec{L}_i$$

durante un processo in cui non agiscano momenti esterni.

Ciò rimane vero anche se la massa si ridistribuisce e il momento d'inerzia cambia durante il processo. Se l'asse di rotazione rimane fisso, vale la relazione:

$$L = I_f \omega_f = I_i \omega_i$$

dove $I_{i,f}$ sono i momenti d'inerzia iniziale e finale, $\omega_{i,f}$ le velocità angolari iniziale e finale. Se $I_f > I_i$, allora $\omega_f < \omega_i$ e viceversa.

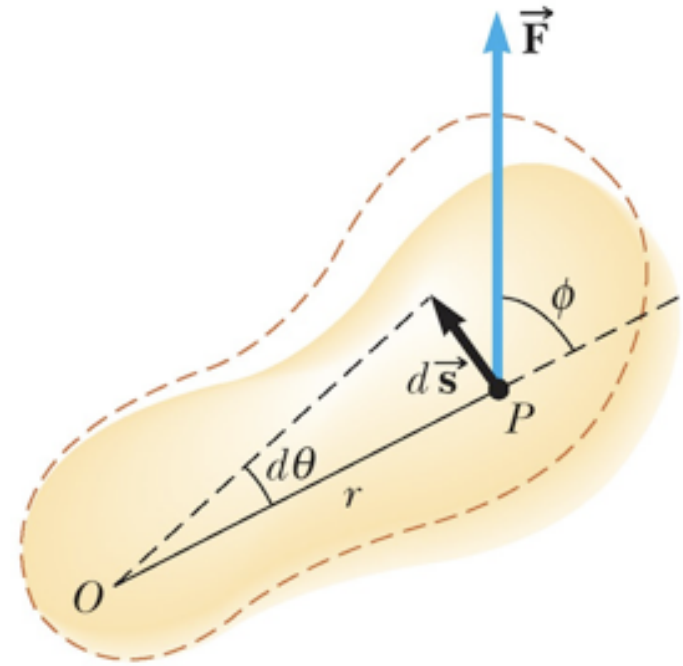


Lavoro nel moto rotazionale

Qual è il lavoro (W) fatto da una forza su di un corpo che sta ruotando?

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi)(r d\theta) = \tau d\theta$$

La componente radiale della forza, $F \cos \phi$, non fa lavoro perché ortogonale allo spostamento



Teorema dell'energia cinetica, versione "rotazionale":

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \omega d\omega = \Delta K_R \quad , \quad K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

In presenza di traslazioni e rotazioni: $W = \Delta K + \Delta K_R$.

Potenza nel moto rotazionale

Il lavoro fatto per unità di tempo è detto *potenza*:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega.$$

Questo è l'analogo di $P = Fv$ per il moto rotatorio.

Riassunto: moto rotazionale

	Moto di traslazione	Moto rotatorio (attorno ad un asse fisso)
Massa	m	I
velocità	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
Quantità di moto	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Equilibrio	$\sum \vec{F} = 0$	$\sum \vec{\tau} = 0$
II Legge di Newton	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$
alternativamente	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Legge di conservazione	$\vec{p} = \text{costante}$	$\vec{L} = \text{costante}$
Potenza	$P = Fv$	$\mathcal{P} = \tau\omega$

Riassunto: leggi di conservazione

Per un sistema isolato (non sottoposto a forze esterne) valgono:

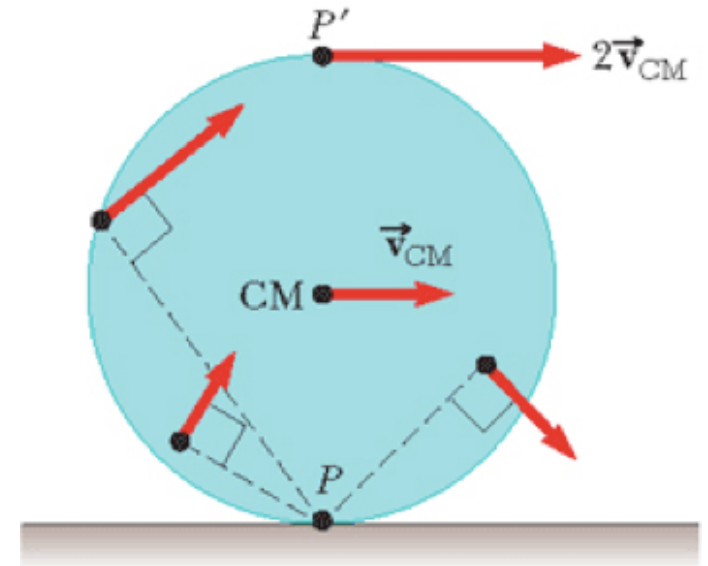
1. Conservazione dell'energia cinetica, $K_f = K_i$
2. Conservazione della quantità di moto, $\vec{p}_f = \vec{p}_i$
3. Conservazione del momento angolare, $\vec{L}_f = \vec{L}_i$

Per sistemi sotto forze conservative: conservazione dell'energia meccanica, $E_f = K_f + U_f = K_i + U_i = E_i$.

Moto di rotolamento puro

Definizione: quando un corpo rotola senza strisciare, ovvero la velocità del punto di contatto (P in figura) lungo il piano di contatto è *nulla*.

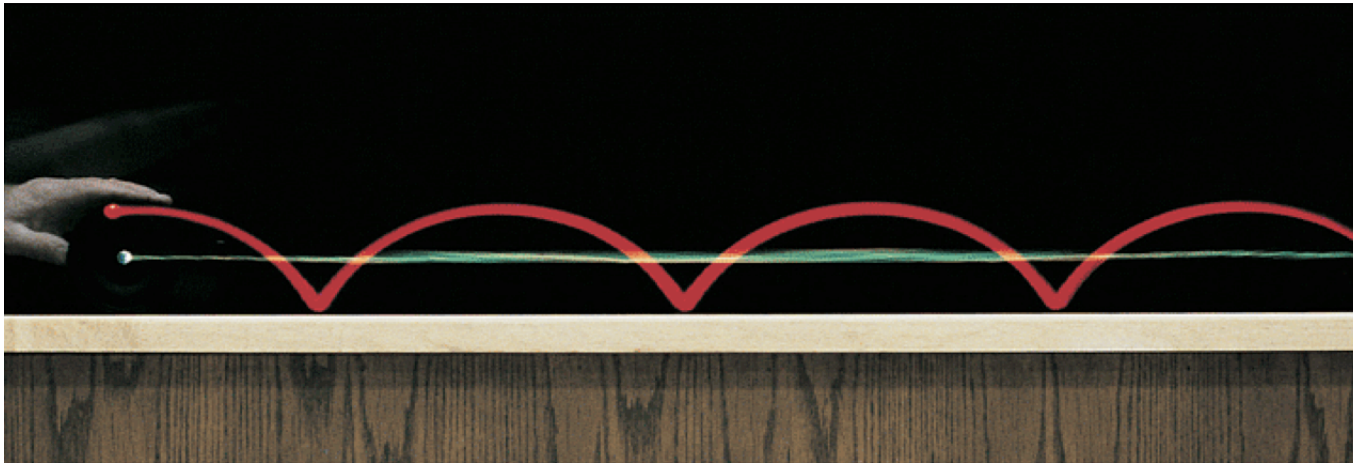
Il moto di rotolamento puro può essere descritto come un moto di rotazione attorno ad un asse *istantaneo* passante per il punto P, di velocità angolare ω ; il centro di massa ha velocità $v_{cm} = \omega R$, dove R è il raggio della ruota. Il punto P ha velocità nulla!



Descrizione alternativa: moto di traslazione del centro di massa con velocità v_{cm} , più un moto rotatorio attorno al centro di massa con velocità angolare ω . Valgono le seguenti relazioni:

$$v_{cm} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \quad , \quad a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$$

Moto di rotolamento puro II

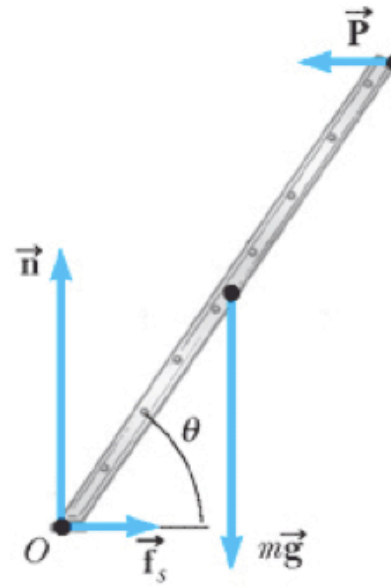
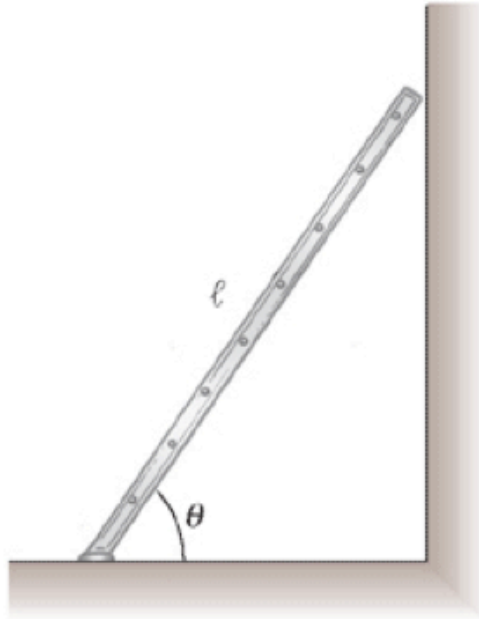


In verde la traiettoria del centro di massa (che è anche il centro della ruota), in rosso la traiettoria del punto P (nota come *cicloide*).

Il moto di rotolamento puro *non* è possibile senza attrito, altrimenti l'oggetto scivolerebbe. Tuttavia l'attrito *non fa lavoro*: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ perché il moto istantaneo del punto P di contatto ha componente solo verticale!

Equilibrio di un corpo rigido, esempio

Scala uniforme di lunghezza ℓ e massa m , appoggiata a parete verticale liscia. Qual è θ_{min} per il quale la scala scivola, se $\mu_s = 0.4$ con il suolo?



Condizione di equilibrio sulle forze: $n = mg$, $P = f_a \leq mg\mu_s$.

Condizione di equilibrio sui momenti (che conviene calcolare rispetto al punto O):
 $mg(\ell/2) \cos \theta = \ell \sin \theta P$ da cui $P = (mg/2 \tan \theta) \leq mg\mu_s$, condizione che può essere rispettata solo se $\tan \theta \geq (1/2\mu_s) = 1.25$, ovvero $\theta_{min} = 51^\circ$.

Momento delle forze gravitazionali

Notare che il momento delle forze gravitazionali agenti su di un corpo è uguale al momento della forza peso, concentrata nel centro di massa:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{g}) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g}$$

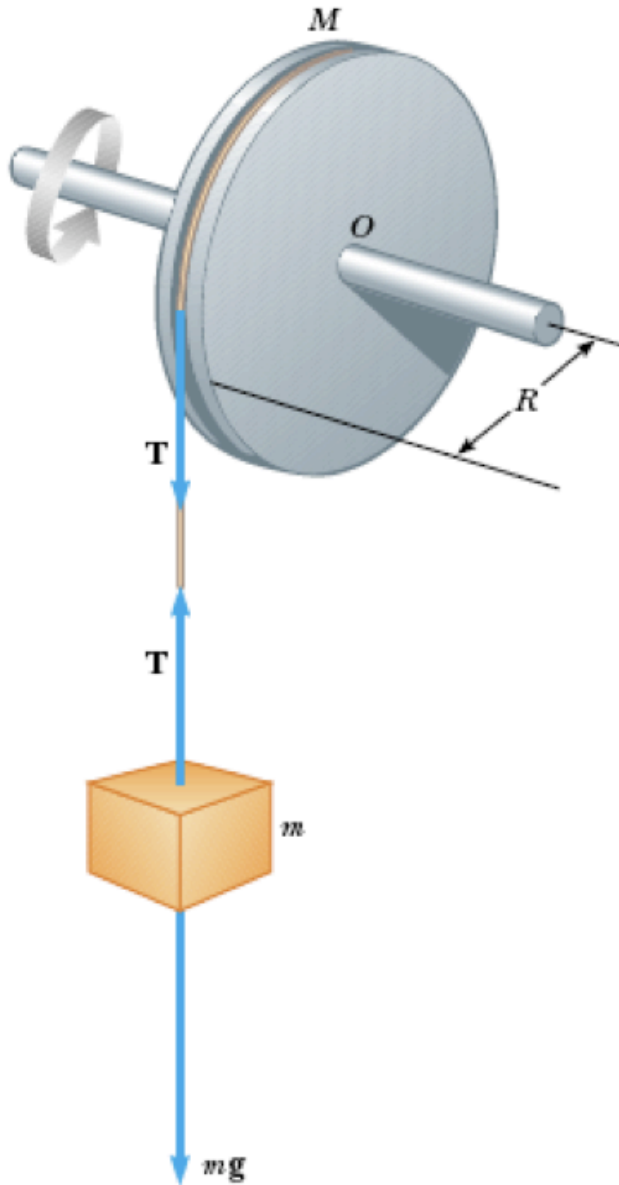
ma per la definizione di centro di massa:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = \left(\sum_i m_i \right) \vec{R}_{cm} = M_{cm} \vec{R}_{cm}$$

da cui

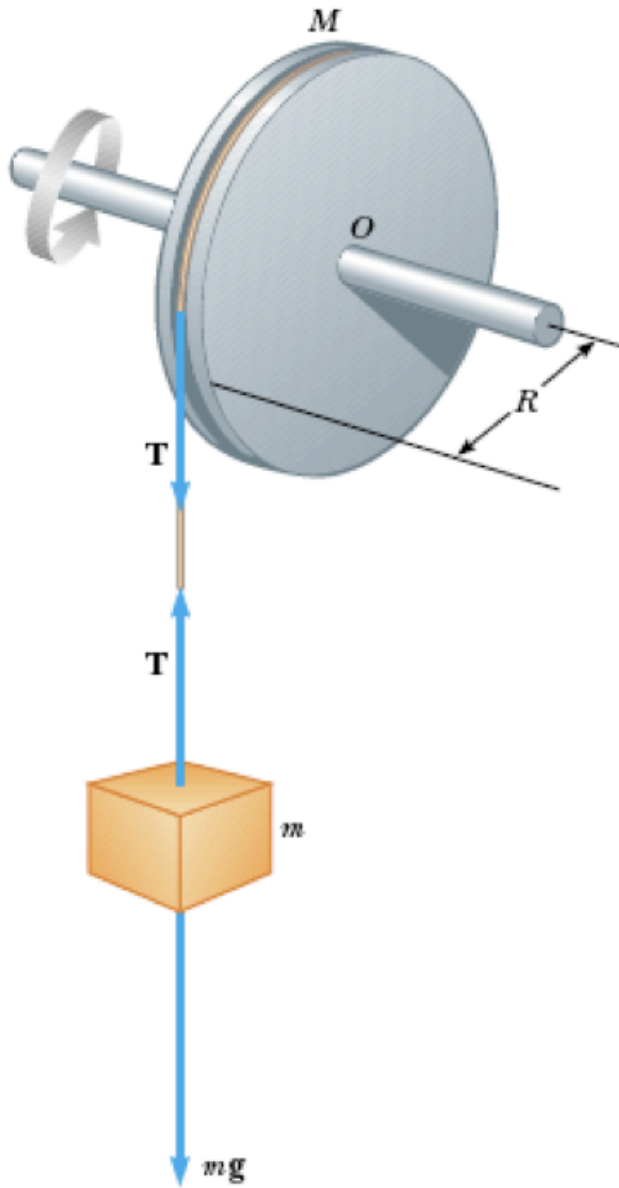
$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times (M_{cm} \vec{g})$$

Esercizio: accelerazione angolare di una ruota



Una ruota di raggio R , massa M , momento di inerzia I può ruotare su di un asse orizzontale. Una corda è avvolta attorno alla ruota e regge un oggetto di massa m . Calcolare l'accelerazione angolare della ruota, l'accelerazione lineare dell'oggetto, la tensione della corda (si trascurino massa della corda, attrito, resistenza dell'aria, etc.)

Soluzione: accelerazione angolare di una ruota



Momento torcente esercitato sulla ruota:
 $\tau = TR$, dove T è la forza esercitata dalla
corda sul bordo della ruota. Da $I\alpha = \tau$ si
ottiene $\alpha = \frac{TR}{I}$.

Legge di Newton per l'oggetto sospeso:

$$mg - T = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

Relazione che lega a e α : $a = R\alpha$, da cui

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

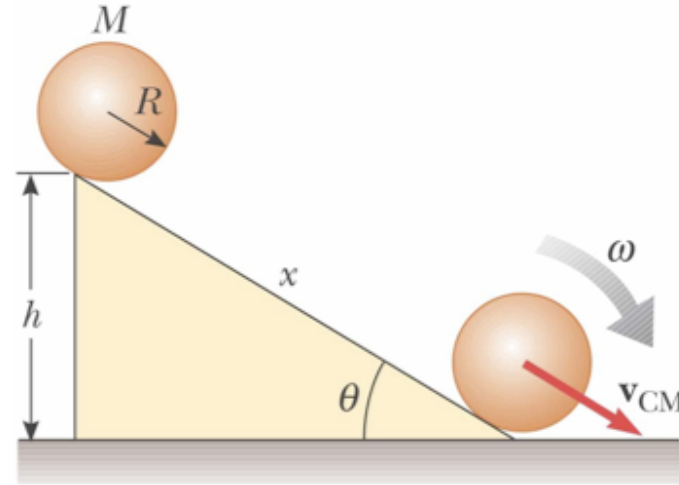
Esercizio: Energia cinetica di un corpo che rotola

Corpo rigido di massa M , velocità del centro di massa v , momento d'inerzia I per rotazioni attorno al centro di massa, velocità angolare ω .

Energia cinetica totale:

$$K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Esempio: sfera (o cilindro) che rotola giù per un piano inclinato. Avremo:



$$v = \omega R \quad , \quad I = \frac{2}{5}MR^2 \implies K = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) Mv^2 = \frac{7}{10}Mv^2$$

Per la conservazione dell'energia meccanica, la velocità finale sarà

$$U_i = Mg(h + R) = \frac{7}{10}Mv^2 + MgR = K_f + U_f \implies v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}.$$

Dinamica di un corpo che rotola

Notare che l'energia potenziale gravitazionale di un corpo è la stessa che se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa:

$$U = \sum_i m_i g h_i = g \left(\sum_i m_i h_i \right) = g \left(\sum_i m_i \right) h_{cm} = M g h_{cm}$$

Risolviamo ora il problema con forze e momenti.

- Lungo il piano: $Ma = Mg \sin \theta - F_a$, dove F_a è la forza di attrito.
- Rispetto al centro della sfera: $I\alpha = \tau = RF_a$, dove $\alpha = a/R$.

$$F_a = \frac{I}{R^2}a = \frac{2}{5}Ma \implies (M + \frac{2}{5}M)a = Mg \sin \theta \implies a = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

ovvero un moto uniformemente accelerato, che può essere facilmente risolto e dà lo stesso risultato del calcolo precedente. Notare che la forza di attrito entra nelle equazioni del moto pur non facendo lavoro!